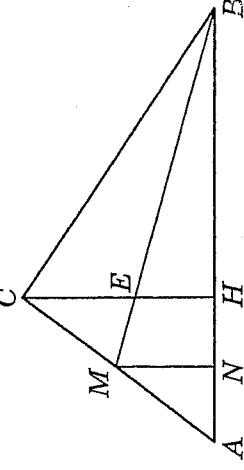


4.



1. Обозначим $2^{2011} = n$, тогда первое выражение $\frac{2^{2011} + 1}{2^{2012} + 1} = \frac{n + 1}{2n + 1}$, а второе $\frac{2^{2012} + 1}{2^{2013} + 1} = \frac{2n + 1}{4n + 1}$. Так как разность первого и второго выражений положительна, то первое число больше второго.

2. Так как $\frac{n^5 + 3}{n^2 + 1} = n^3 - n + \frac{n + 3}{n^2 + 1}$, то $n^5 + 3$ будет делиться нацело на $n^2 + 1$, если $\frac{n + 3}{n^2 + 1}$ — целое. Соответственно при

дробном $\frac{n + 3}{n^2 + 1}$ $n^5 + 3$ делиться нацело на $n^2 + 1$ не будет.

Решая неравенство $\frac{n^5 + 3}{n^2 + 1} < 1$ и учитывая, что $\frac{n^5 + 3}{n^2 + 1} \neq 0$,

найдем, что при $n < -1$, $n > 2$, $n \neq -3$ $\frac{n + 3}{n^2 + 1}$ является дробным. Проверая остальные целые числа, получаем, что при $n = -3; -1; 0; 1; 2$ $\frac{n + 3}{n^2 + 1}$ является целым, а, значит, при этих целых числах $n^5 + 3$ делится нацело на $n^2 + 1$.

Ответ. $n = -3; -1; 0; 1; 2$.

3. Запишем уравнение $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} = 5$ в виде $x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) = 5$. Заметим, что $(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$. Обозна-

чим $y = x - \frac{1}{x}$, тогда получим $y^2 + \frac{1}{2}y - 3 = 0$, откуда $y = \frac{3}{2}$ или $y = -2$. Решая уравнения $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ и $x - \frac{1}{x} = -2$, получим: $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -1 + \sqrt{2}, x_4 = -1 - \sqrt{2}$.

Ответ. $2; \frac{1}{2}; -1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}$.

Допустим, что в треугольнике ABC проведены биссектриса AL , медиана BM и высота CH , причём AL и CH пересекаются в точке D , BM и CH — в точке E , и точки D и E делят высоту CH на три равные части. Перпендикуляр MN , опущенный из точки M на прямую AB , равен половине высоты CH . Значит, отрезок EN , который меньше, чем MN , равен трети высоты. Тогда отрезок DH должен составлять две трети высоты. Опустим из точки D перпендикуляр DF на сторону AC . По свойству биссектрисы угла $DF = DH$. Но это невозможно, ибо в таком случае катет DF прямоугольного треугольника CDF оказывается вдвое длиннее его гипотенузы CD , составляющей треть высоты CH .

5. Обозначим всю траву на лугу за 1, прирост травы в 1 день за a . Тогда через 24 дня на лугу будет $1 + 24a$ травы, через 60 дней — $1 + 60a$, через 96 дней — $1 + 96a$. Так 70 коров съели всю траву за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней, то количество съеденной травы 1 коровой за 1 день найдем как $\frac{1 + 24a}{24 \cdot 70}$ или $\frac{1 + 60a}{30 \cdot 60}$. Из уравнения $\frac{1 + 24a}{24 \cdot 70} = \frac{1 + 60a}{30 \cdot 60}$ найдем $a = \frac{1}{480}$, тогда через 96 дней на лугу будет $1 + 96a = 1,2$ травы. За 1 день корова съедает $\frac{1}{1600}$ травы, а за 96 дней — $0,06$. Тогда 1,2 травы съедят $\frac{1,2}{0,06} = 20$ (коров).

Ответ. 20 коров.