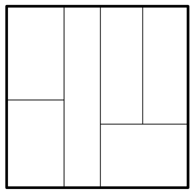
6 класс

6.1. Приведите какое-нибудь одно решение числового ребуса ДО + РЕ + МИ + ФА = 128 (различными буквами зашифрованы различные ненулевые цифры).

6.2. Петя, Коля и Вася стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Когда Петя пробежал половину дистанции, Коля и Вася в сумме пробежали 85 метров. Известно, что скорость каждого постоянна на протяжении всей дистанции. Сколько метров в сумме оставалось пробежать до финиша Коле и Васе, когда Петя пришёл к финишу?

6.3. Квадрат разрезан на прямоугольники так, как показано на рисунке. Оказалось, что площади всех прямоугольников равны. Найдите отношение сторон правого нижнего прямоугольника.



6.4. Трое учеников написали тест. За правильно решённую задачу ученику ставилось 2 балла, за неправильно решённую — снимался 1 балл, а если ответ на задачу не записан, то ставилось 0 баллов. Вместе ученики набрали 100 баллов. Докажите, что кто-то из них при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.

6.5. В комнате лежал небольшой мешок с яблоками. Среди 10 человек часть — рыцари (они всегда говорят правду), а остальные — лжецы (они всегда лгут). Первый из этих 10 человек зашёл в комнату, заглянул в мешок и сказал: «В мешке больше 1 яблока»; после этого он взял одно яблоко из мешка и вышел из комнаты. Потом зашел второй, и, заглянув в мешок, сказал, что в нём больше двух яблок. Затем он взял яблоко из мешка и вышел. Так же и остальные по очереди заходили, говорили, что в мешке осталось больше 3, 4, . . . , 10 яблок, брали по яблоку и выходили из комнаты. Какое наибольшее число лжецов может быть среди этих 10 человек?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте www.100ege.ru. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 6 класса в 17-00.

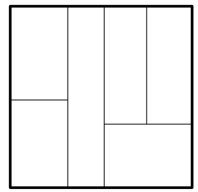
XL Московская областная математическая олимпиада

6 класс

6.1. Приведите какое-нибудь одно решение числового ребуса ДО + РЕ + МИ + ФА = 128 (различными буквами зашифрованы различные ненулевые цифры).

6.2. Петя, Коля и Вася стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Когда Петя пробежал половину дистанции, Коля и Вася в сумме пробежали 85 метров. Известно, что скорость каждого постоянна на протяжении всей дистанции. Сколько метров в сумме оставалось пробежать до финиша Коле и Васе, когда Петя пришёл к финишу?

6.3. Квадрат разрезан на прямоугольники так, как показано на рисунке. Оказалось, что площади всех прямоугольников равны. Найдите отношение сторон правого нижнего прямоугольника.



6.4. Трое учеников написали тест. За правильно решённую задачу ученику ставилось 2 балла, за неправильно решённую — снимался 1 балл, а если ответ на задачу не записан, то ставилось 0 баллов. Вместе ученики набрали 100 баллов. Докажите, что кто-то из них при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.

6.5. В комнате лежал небольшой мешок с яблоками. Среди 10 человек часть — рыцари (они всегда говорят правду), а остальные — лжецы (они всегда лгут). Первый из этих 10 человек зашёл в комнату, заглянул в мешок и сказал: «В мешке больше 1 яблока»; после этого он взял одно яблоко из мешка и вышел из комнаты. Потом зашел второй, и, заглянув в мешок, сказал, что в нём больше двух яблок. Затем он взял яблоко из мешка и вышел. Так же и остальные по очереди заходили, говорили, что в мешке осталось больше 3, 4, . . . , 10 яблок, брали по яблоку и выходили из комнаты. Какое наибольшее число лжецов может быть среди этих 10 человек?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте www.100ege.ru. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 6 класса в 17-00.

7 класс

7.1. На двух карточках написано одно и то же семизначное число N, оканчивающееся на 9876. Одну карточку разрезали на две, проведя разрез между третьей и четвёртой цифрами, а другую — проведя разрез между четвёртой и пятой цифрами. Приведите пример какого-нибудь числа N такого, чтобы сумма чисел на половинках первой карточки была равна сумме чисел на половинках второй карточки.

7.2. Маша каждый день берёт в школу и съедает на переменах либо 6 слив, либо 2 яблока и банан. В пятницу, когда она съела на перемене часть принесённых фруктов (но не все), оказалось, что с начала недели она уже съела на переменах 21 фрукт. Сколько и каких фруктов осталось у неё в портфеле? Объясните свой ответ.

7.3. В зале 2013 человек; каждый из них — либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). Каждого из них спросили: «Кого в зале больше: лжецов или рыцарей?». Каких ответов — «Лжецов» или «Рыцарей» — было больше и почему?

7.4. На клетчатую доску 7×7 положили 16 трёхклеточных уголков так, что ровно одна клетка оказалась непокрытой. Верно ли, что всегда можно убрать один уголок так, что на освободившееся место можно положить трёхклеточный прямоугольник?

7.5. Загаданы четыре различных натуральных числа. Математик знает про это. Вначале ему назвали сумму двух самых маленьких чисел, и он не смог угадать эти два числа. Но, когда ему сказали, что сумма всех четырёх чисел равна 15, он сумел назвать все четыре числа. Чему равны эти числа? Объясните, как рассуждал математик.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 7 класса в 18-00.

XL Московская областная математическая олимпиада

7 класс

7.1. На двух карточках написано одно и то же семизначное число N, оканчивающееся на 9876. Одну карточку разрезали на две, проведя разрез между третьей и четвёртой цифрами, а другую — проведя разрез между четвёртой и пятой цифрами. Приведите пример какого-нибудь числа N такого, чтобы сумма чисел на половинках первой карточки была равна сумме чисел на половинках второй карточки.

7.2. Маша каждый день берёт в школу и съедает на переменах либо 6 слив, либо 2 яблока и банан. В пятницу, когда она съела на перемене часть принесённых фруктов (но не все), оказалось, что с начала недели она уже съела на переменах 21 фрукт. Сколько и каких фруктов осталось у неё в портфеле? Объясните свой ответ.

7.3. В зале 2013 человек; каждый из них — либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). Каждого из них спросили: «Кого в зале больше: лжецов или рыцарей?». Каких ответов — «Лжецов» или «Рыцарей» — было больше и почему?

7.4. На клетчатую доску 7×7 положили 16 трёхклеточных уголков так, что ровно одна клетка оказалась непокрытой. Верно ли, что всегда можно убрать один уголок так, что на освободившееся место можно положить трёхклеточный прямоугольник?

7.5. Загаданы четыре различных натуральных числа. Математик знает про это. Вначале ему назвали сумму двух самых маленьких чисел, и он не смог угадать эти два числа. Но, когда ему сказали, что сумма всех четырёх чисел равна 15, он сумел назвать все четыре числа. Чему равны эти числа? Объясните, как рассуждал математик.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 7 класса в 18-00.

8 класс

8.1. За круглым столом сидят несколько человек — каждый из них либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). У каждого из них спросили: «Кто твой сосед справа — рыцарь или лжец?». При этом было получено ровно 20 ответов «Лжец». Докажите, что на вопрос: «Кто твой сосед слева — рыцарь или лжец?» также было бы получено ровно 20 ответов «Лжец».

8.2. Петя и три его одноклассника стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 12 секунд после начала забега никто ещё не финишировал, и все его участники в сумме пробежали 288 метров. А когда Петя закончил бег, остальным трём участникам оставалось пробежать до финиша в сумме 40 метров. Сколько метров пробежал Петя за 12 секунд? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

8.3. Докажите, что можно выбрать три натуральных числа a, b, c, больших 2013 и таких, что $a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$.

8.4. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла BAC пересекает прямую CD в точке E, а биссектриса угла DAC пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что биссектриса угла BAD перпендикулярна прямой EF.

8.5. Каких семизначных чисел без нулей в записи больше: тех, у которых сумма цифр равна 15, или тех, у которых она равна 48?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 8 класса в 19-00.

XL Московская областная математическая олимпиада

8 класс

8.1. За круглым столом сидят несколько человек — каждый из них либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). У каждого из них спросили: «Кто твой сосед справа — рыцарь или лжец?». При этом было получено ровно 20 ответов «Лжец». Докажите, что на вопрос: «Кто твой сосед слева — рыцарь или лжец?» также было бы получено ровно 20 ответов «Лжец».

8.2. Петя и три его одноклассника стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 12 секунд после начала забега никто ещё не финишировал, и все его участники в сумме пробежали 288 метров. А когда Петя закончил бег, остальным трём участникам оставалось пробежать до финиша в сумме 40 метров. Сколько метров пробежал Петя за 12 секунд? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

8.3. Докажите, что можно выбрать три натуральных числа a, b, c, больших 2013 и таких, что $a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$.

8.4. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла BAC пересекает прямую CD в точке E, а биссектриса угла DAC пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что биссектриса угла BAD перпендикулярна прямой EF.

8.5. Каких семизначных чисел без нулей в записи больше: тех, у которых сумма цифр равна 15, или тех, у которых она равна 48?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 8 класса в 19-00.

9 класс

9.1. Числа от 1 до 20 разбили на пары, и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из этих 10 сумм может делиться на 11?

9.2. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если прибавить к коэффициенту a один из этих корней, а из коэффициента b вычесть квадрат этого же корня, то полученное уравнение также будет иметь корень.

9.3. На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске?

9.4. На основании AD равнобокой трапеции $ABCD$ выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают вторично окружность, описанную около трапеции $ABCD$, в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника KMN, касается прямой AD.

9.5. Имеется таблица 11×11, из которой вырезана центральная клетка. Двое играют в следующую игру. Они по очереди ставят в пустые клетки этой таблицы крестики и нолики: первый игрок за ход ставит один крестик, а второй — один нолик. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. После этого вычисляются два числа: A — количество строк, в которых больше крестиков, чем ноликов, и B — количество столбцов, в которых больше ноликов, чем крестиков. (При этом средняя строка считается одной строкой из 10 клеток, а средний столбец — одним столбцом из 10 клеток.) Первый выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте www.100ege.ru. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 9 класса в 17-00.

XL Московская областная математическая олимпиада

9 класс

9.1. Числа от 1 до 20 разбили на пары, и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из этих 10 сумм может делиться на 11?

9.2. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если прибавить к коэффициенту a один из этих корней, а из коэффициента b вычесть квадрат этого же корня, то полученное уравнение также будет иметь корень.

9.3. На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске?

9.4. На основании AD равнобокой трапеции $ABCD$ выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают вторично окружность, описанную около трапеции $ABCD$, в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника KMN, касается прямой AD.

9.5. Имеется таблица 11×11, из которой вырезана центральная клетка. Двое играют в следующую игру. Они по очереди ставят в пустые клетки этой таблицы крестики и нолики: первый игрок за ход ставит один крестик, а второй — один нолик. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. После этого вычисляются два числа: A — количество строк, в которых больше крестиков, чем ноликов, и B — количество столбцов, в которых больше ноликов, чем крестиков. (При этом средняя строка считается одной строкой из 10 клеток, а средний столбец — одним столбцом из 10 клеток.) Первый выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте www.100ege.ru. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 9 класса в 17-00.

10 класс

10.1. Вася, Петя и Миша стартовали одновременно в забеге на 1 км. Когда Вася финишировал, Петя отставал от него на 100 м, а Миша отставал от Пети на 90 м. Петя закончил бег на 18 секунд позже Васи. На сколько секунд позже Пети прибежал Миша? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

10.2. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента a один из этих корней, а коэффициент b удвоить, то полученное уравнение также будет иметь корень.

10.3. На доске написаны несколько различных чисел. Известно, что сумма любых трёх написанных чисел рациональна, а сумма любых двух написанных чисел — иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске?

10.4. В четырёхугольнике $ABCD$, в котором $BA = BC$ и $DA = DC$, продолжения сторон BA и CD пересекаются в точке N, а продолжения сторон BC и AD — в точке M. Известно, что разность длин двух сторон четырёхугольника $ABCD$ равна радиусу вписанной в этот четырёхугольник окружности. Найдите отношение длин отрезков BD и MN.

10.5. Имеется таблица 11×11. Двое играют в следующую игру. Они по очереди ставят в пустые клетки этой таблицы крестики и нолики: первый за ход ставит один крестик, а второй — один нолик. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. После этого вычисляются два числа: A — количество строк, в которых больше крестиков, чем ноликов, и B — количество столбцов, в которых больше ноликов, чем крестиков. Первый выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 10 класса в 18-00.

XL Московская областная математическая олимпиада

10 класс

10.1. Вася, Петя и Миша стартовали одновременно в забеге на 1 км. Когда Вася финишировал, Петя отставал от него на 100 м, а Миша отставал от Пети на 90 м. Петя закончил бег на 18 секунд позже Васи. На сколько секунд позже Пети прибежал Миша? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

10.2. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента a один из этих корней, а коэффициент b удвоить, то полученное уравнение также будет иметь корень.

10.3. На доске написаны несколько различных чисел. Известно, что сумма любых трёх написанных чисел рациональна, а сумма любых двух написанных чисел — иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске?

10.4. В четырёхугольнике $ABCD$, в котором $BA = BC$ и $DA = DC$, продолжения сторон BA и CD пересекаются в точке N, а продолжения сторон BC и AD — в точке M. Известно, что разность длин двух сторон четырёхугольника $ABCD$ равна радиусу вписанной в этот четырёхугольник окружности. Найдите отношение длин отрезков BD и MN.

10.5. Имеется таблица 11×11. Двое играют в следующую игру. Они по очереди ставят в пустые клетки этой таблицы крестики и нолики: первый за ход ставит один крестик, а второй — один нолик. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. После этого вычисляются два числа: A — количество строк, в которых больше крестиков, чем ноликов, и B — количество столбцов, в которых больше ноликов, чем крестиков. Первый выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 10 класса в 18-00.

11 класс

11.1. Решите уравнение $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} = 3^{-x} + 4^{-y}$.

11.2. Все натуральные числа от 2 до 101 разбили на две группы по 50 чисел в каждой. Числа в каждой группе перемножили, и два полученных произведения сложили. Докажите, что эта сумма — составное число.

11.3. Приведенный квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет корни t_1 и t_2, причём $-1 < t_2 < 0$. Докажите, что если прибавить к коэффициентам a и b корень t_2, то полученное уравнение также будет иметь два различных корня.

11.4. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведены четыре высоты — перпендикуляры из вершин на противоположные грани. Назовем высоту пирамиды *длинной*, если она не короче каждой из трёх высот треугольника, являющегося гранью, к которой эта высота проведена (например, высота из вершины B — длинная, если она не короче каждой из высот треугольника ACD). Какое наибольшее количество длинных высот может иметь пирамида $ABCD$?

11.5. Имеется 2013 карточек, на каждой из которых с одной стороны написано число от 1 до 2013 (на всех карточках числа разные). Их положили по кругу чистой стороной вверх. Вася переворачивает одну карточку. После этого, если на карточке написано число N, то он отсчитывает N-ую карточку по часовой стрелке и переворачивает ее. Таким образом он продолжает переворачивать карточки (одна карточка может быть перевёрнута несколько раз). Может ли так оказаться, что в некоторый момент все карточки будут лежать числами вверх?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 11 класса в 19-00.

XL Московская областная математическая олимпиада

11 класс

11.1. Решите уравнение $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} = 3^{-x} + 4^{-y}$.

11.2. Все натуральные числа от 2 до 101 разбили на две группы по 50 чисел в каждой. Числа в каждой группе перемножили, и два полученных произведения сложили. Докажите, что эта сумма — составное число.

11.3. Приведенный квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет корни t_1 и t_2, причём $-1 < t_2 < 0$. Докажите, что если прибавить к коэффициентам a и b корень t_2, то полученное уравнение также будет иметь два различных корня.

11.4. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведены четыре высоты — перпендикуляры из вершин на противоположные грани. Назовем высоту пирамиды *длинной*, если она не короче каждой из трёх высот треугольника, являющегося гранью, к которой эта высота проведена (например, высота из вершины B — длинная, если она не короче каждой из высот треугольника ACD). Какое наибольшее количество длинных высот может иметь пирамида $ABCD$?

11.5. Имеется 2013 карточек, на каждой из которых с одной стороны написано число от 1 до 2013 (на всех карточках числа разные). Их положили по кругу чистой стороной вверх. Вася переворачивает одну карточку. После этого, если на карточке написано число N, то он отсчитывает N-ую карточку по часовой стрелке и переворачивает ее. Таким образом он продолжает переворачивать карточки (одна карточка может быть перевёрнута несколько раз). Может ли так оказаться, что в некоторый момент все карточки будут лежать числами вверх?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 1 декабря, пройдёт онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия нужно заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады.

Начало разбора для 11 класса в 19-00.