до этого должны быть открыты (в некотором порядке) все карточки с числами от 1 до 2012.

Пусть Вася первой открыл карточку с числом k. Посчитаем, какой по отношению к этой карточке будет карточка с числом 2013. Через 2012 «ходов» Вася должен ее открыть. При этом он должен отсчитывать от карточки с числом k по часовой стрелке ровно $1+2+\ldots+2012$ карточек. Но $1+2+\ldots+2012 = \frac{2013 \cdot 2012}{2} = 2013 \cdot 1006$. То есть после переворачивания 2012 карточек он опять попадет в карточку с числом k и не сможет перевернуть карточку с числом 2013. Противоречие.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано, что карточка с числом 2013 должна быть перевёрнута последней — 2 балла.

Материалы для проведения муниципального этапа

XL МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2013–2014 учебный год

1 декабря 2013 г.

Долгопрудный, 2013

Сборник содержит материалы для проведения II (муниципального) этапа XL Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили члены региональной Методической комиссии по математике в Московской области к.ф.-м.н. Н.Х. Агаханов и к.ф.-м.н. О.К. Подлипский (Московский физико-технический институт (государственный университет)). Авторы задач Н.Х. Агаханов и О.К. Подлипский; задача 9.4 предложена П.А. Кожевниковым (по мотивам задачи Ф.К. Нилова), задача 10.4 предложена И.И. Богдановым (по мотивам задачи Болгарской математической олимпиады).

Рецензенты: к.ф.-м.н. Богданов И.И., к.ф.-м.н. Трушин Б.В.

Компьютерный макет подготовил Богданов И.И.

Уважаемые коллеги!

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, рекомендуем при проверке работ оценивать:

– правильное решение в 7 баллов;
– решение с недочетами — 5–6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Работа выполняется в течение 4 часов, учащимися 6 классов — 3 часов.

Вопросы по организации проведения олимпиады, её содержанию и оценке работ участников можно задать 1 декабря 2013 г. с 9.30 до 18.30 по телефону (495) 408–76–66.

Согласно действующему Положению о Всероссийской олимпиаде школьников, победителями муниципального этапа являются участники, набравшие наибольшее количество баллов при условии, что количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможного количества баллов, то есть не менее 18 баллов. Важно отметить, что победителями и призёрами олимпиады в каждой параллели (6–11 классов) могут стать несколько участников — возможно, набравших разное количество баллов. Однако, количество победителей

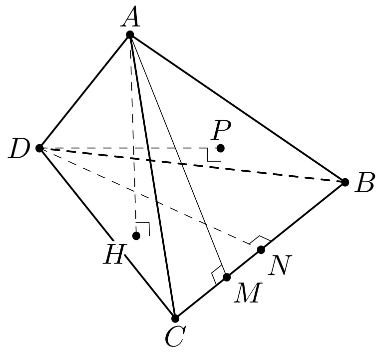


Рис. 6

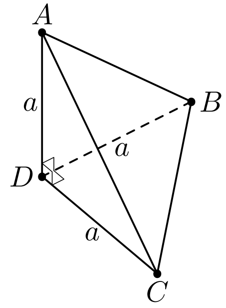


Рис. 7

Только пример — 2 балла.

11.5. Имеется 2013 карточек, на каждой из которых с одной стороны написано число от 1 до 2013 (на всех карточках числа разные). Их положили по кругу чистой стороной вверх. Вася переворачивает одну карточку. После этого, если на карточке написано число N, то он отсчитывает N-ую карточку по часовой стрелке и переворачивает ее. Таким образом он продолжает переворачивать карточки (одна карточка может быть перевёрнута несколько раз). Может ли так оказаться, что в некоторый момент все карточки будут лежать числами вверх?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что Вася сможет перевернуть все карточки числами вверх. Пусть в некоторый момент до этого Васе пришлось перевернуть какую-то карточку во второй раз; тогда после этого он будет переворачивать только те карточки, которые он уже переворачивал до этого. Значит, если перед этим ходом не все карточки были перевёрнуты, то все карточки не будут перевёрнуты никогда. Итак, в некоторый момент каждая карточка будет перевёрнута ровно один раз. Рассмотрим этот момент.

Если Вася открыл карточку с числом 2013, то следующая карточка будет 2013-й по часовой стрелке, то есть это будет та же карточка. Второй раз её переворачивать мы не должны; значит, для того, чтобы перевернуть все карточки, карточка с числом 2013 должна быть перевёрнута последней. Следовательно,

$-2t_2)^2-4((t_2)^2+t_2)$. Утверждение задачи теперь следует из того, что при $t_2\in(-1;0)$ сумма $t_2^2+t_2=t_2(t_2+1)$ отрицательна (и, значит, $D>0$).

11.4. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведены четыре высоты — перпендикуляры из вершин на противоположные грани. Назовем высоту пирамиды *длинной*, если она не короче каждой из трёх высот треугольника, являющегося гранью, к которой эта высота проведена (например, высота из вершины B — длинная, если она не короче каждой из высот треугольника ACD). Какое наибольшее количество длинных высот может иметь пирамида $ABCD$?

Ответ. Три.

Решение. Докажем вначале, что все четыре высоты пирамиды не могут быть длинными. Предположим противное. Пусть AH и DP — высоты пирамиды $ABCD$, а AM, DN — высоты треугольников ABC и DBC соответственно (см. рис. 6). По условию имеем $AH\geqslant DN$ и $DP\geqslant AM$. Но перпендикуляр AH не длиннее наклонной AM к той же плоскости BCD; аналогично $DP\leqslant DN$. Итак, получаем $AM\geqslant AH\geqslant DN\geqslant DP\geqslant AM$. Значит, все эти неравенства должны обратиться в равенства, что возможно только если отрезки AH и AM совпадают. Тогда плоскость CAB содержит перпендикуляр AM к плоскости BCD, то есть $CAB\perp BCD$. Аналогично, $DAC\perp BCD$. Значит, и линия пересечения плоскостей DAC и CAB — прямая AC — перпендикулярна плоскости BCD. Аналогично, $BA\perp BCD$; но тогда $AC\parallel AB$, что невозможно. Значит, длинных высот не больше трёх.

Осталось показать, что существует пирамида $ABCD$, имеющая ровно три длинных высоты. Это пирамида, плоские углы при вершине D которой — прямые, а длины ребер, выходящих из этой вершины, одинаковы и равны a (см. рис. 7). У такой пирамиды высоты из вершин A, B, C имеют длину a, а длины высот треугольников граней, к которым эти высоты проведены, равны a или $a/\sqrt{2}$.

Комментарий. Доказано, что длинных высот не больше трёх — 5 баллов.

и призёров не должно превышать 25 % от общего числа участников олимпиады.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний…»). Существует ряд задач, в которых ответ выбирается из двух вариантов (например, в задачах с вопросом «Верно ли…», «Может ли…» или «Существует ли…»). В таких задачах только угаданный правильный ответ без объяснений, как правило, оценивается в 0 баллов.

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4–5 баллов, второй шаг — в 2–3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 6 класса, не умеют чётко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 6–7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

Желаем успешной работы!

В 2013–2014 учебном году III (региональный) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (Московская областная математическая олимпиада) будет проведен 4 февраля (1 тур) и 5 февраля (2 тур) 2014 г. для учащихся 9–11 классов. Одновременно для учащихся 8 класса будет проведён региональный этап олимпиады Эйлера. Согласно Положению о Всероссийской олимпиаде школьников, участниками регионального этапа являются:

– школьники, являющиеся победителями и призёрами регионального этапа олимпиады предыдущего года;

– победители и призёры муниципального этапа олимпиады текущего года.

В соответствии с приказом Министерства образования Московской области оба тура региональной олимпиады пройдут на базе МФТИ в г. Долгопрудном и г. Жуковском. Муниципальное образование при сдаче заявки на участие выбирает место проведения (из двух) самостоятельно.

Для формирования списков участников регионального этапа олимпиады и олимпиады Эйлера просьба направить копии списков победителей и призёров по 8–11 классам в электронном виде в Оргкомитет олимпиады по адресу `mosoblmath2014@mail.ru`.

11 класс

11.1. Решите уравнение $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} = 3^{-x} + 4^{-y}$.

Ответ. $x = y = 0$.

Решение. По ОДЗ имеем $xy \geqslant 0$ и $x + y \geqslant 0$. Если, скажем, $x < 0$, то из первого неравенства получаем $y \leqslant 0$, а значит, $x + y < 0$, что не так. Значит, $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Но тогда $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} \geqslant 2^0 + 5^0 = 2$ и $3^{-x} + 4^{-y} \leqslant 3^0 + 4^0 = 2$; при этом равенства достигаются только при $x = y = 0$. Значит, и требуемое равенство возможно лишь при $x = y = 0$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ — 2 балла.

11.2. Все натуральные числа от 2 до 101 разбили на две группы по 50 чисел в каждой. Числа в каждой группе перемножили, и два полученных произведения сложили. Докажите, что эта сумма — составное число.

Решение. Среди 100 подряд идущих чисел ровно 50 являются чётными. Поэтому, если при разбиении на группы не все 50 чётных чисел попадут в одну группу, то в каждой из групп произведение будет делиться на 2, а значит, и сумма произведений будет делиться на 2. Если же в одной группе окажутся все чётные числа, а в другой — все нечётные, то их произведения будут делиться на 3, так как в одной группе окажется число 6, а в другой — 3. В этом случае рассматриваемая сумма произведений будет делиться на 3. В обоих случаях мы указали делитель полученной суммы, больший единицы, но меньший, чем сама сумма. Значит, эта сумма — составное число.

Комментарий. Решение проходит только для случая, когда в каждой группе есть чётные числа — 2 балла.

11.3. Приведенный квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет корни t_1 и t_2, причём $-1 < t_2 < 0$. Докажите, что если прибавить к коэффициентам a и b корень t_2, то полученное уравнение также будет иметь два различных корня.

Решение. Согласно теореме Виета имеем $a = -t_1 - t_2$, $b = t_1 t_2$. Поэтому новое уравнение имеет вид $x^2 - t_1 x + t_1 t_2 + t_2 = 0$. Его дискриминант равен $D = t_1^2 - 4t_1 t_2 - 4t_2$, то есть $D = (t_1 -$

тральной клетке (центре таблицы) стоит крестик. Остальные 10 клеток разбиваются на 5 пар симметричных. Это означает, что в них стоят 5 крестиков и 5 ноликов. Значит, всего в этой строке стоят 6 крестиков и 5 ноликов, поэтому в центральной строке крестиков больше, чем ноликов. Аналогично, в центральном столбце крестиков больше, чем ноликов.

Рассмотрим теперь первую и последнюю строки таблицы. Их клетки образуют 11 пар симметричных клеток. Это означает, что в них суммарно стоит 11 крестиков и 11 ноликов. Значит, если в одной из этих строк больше крестиков, то в другой больше ноликов. Аналогичное утверждение можно доказать про остальные пары симметричных строк таблицы, а также про все пары симметричных столбцов. Итак, в этих парах количество строк, в которых больше крестиков, будет равно 5, и количество столбцов, в которых больше ноликов, будет также равно 5. Поэтому $A = 6$, $B = 5$, и первый выиграет.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Верно описана симметричная стратегия, но не доказано, что она приводит к победе — 2 балла.

Условия и решения задач

6 класс

6.1. Приведите какое-нибудь одно решение числового ребуса ДО + + РЕ + МИ + ФА = 128 (различными буквами зашифрованы различные ненулевые цифры).

Ответ. $15 + 26 + 38 + 49 = 128$.

Замечание. Ответ является единственным с точностью до перестановок у слагаемых цифр в разрядах единиц или цифр в разрядах десятков.

Комментарий. Использованы одинаковые цифры или цифра ноль — 0 баллов.

Любой правильный пример — 7 баллов.

6.2. Петя, Коля и Вася стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Когда Петя пробежал половину дистанции, Коля и Вася в сумме пробежали 85 метров. Известно, что скорость каждого постоянна на протяжении всей дистанции. Сколько метров в сумме оставалось пробежать до финиша Коле и Васе, когда Петя пришёл к финишу?

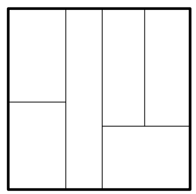
Ответ. 30 м.

Решение. Когда Петя добежит до финиша, Коля и Вася в сумме пробегут $2 \cdot 85 = 170$ м из $100 + 100 = 200$ м, которые они вместе должны пробежать. Значит, им останется пробежать $200 - 170 = 30$ м.

Комментарий. Только ответ и пример с указанием расстояний, которые пробежали Коля и Вася, без обоснования того, что другие ответы невозможны — 2 балла.

Только ответ — 0 баллов.

6.3. Квадрат разрезан на прямоугольники так, как показано на рисунке. Оказалось, что площади всех прямоугольников равны. Найдите отношение сторон правого нижнего прямоугольника.



Ответ. $3 : 2$.

Решение. Площадь каждого прямоугольника в 6 раз меньше площади квадрата. Площадь прямоугольника Q, составленного из прямоугольников D, E и F (см. рис. 1), равна половине площади квадрата; значит, горизонтальная сторона прямоугольника F равна половине стороны квадрата. Площадь прямоугольника F составляет треть от площади Q; значит, вертикальная сторона F равна трети стороны квадрата. Поэтому его стороны относятся как $3:2$.

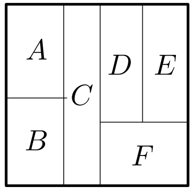


Рис. 1

6.4. Трое учеников написали тест. За правильно решённую задачу ученику ставилось 2 балла, за неправильно решённую — снимался 1 балл, а если ответ на задачу не записан, то ставилось 0 баллов. Вместе ученики набрали 100 баллов. Докажите, что кто-то из них при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.

Решение. Предположим, что все три ученика писали ответы ко всем задачам. Тогда, если какую-то задачу они все трое решили правильно, то они получат за неё вместе $2\cdot 3 = 6$ баллов. Если какую-то задачу двое из них решили правильно, а один нет, то они получат за неё вместе $2+2-1 = 3$ балла. Если какую-то задачу один решил правильно, а двое нет, то они получат за неё вместе $2-1-1 = 0$ баллов. Наконец, если какую-то задачу они все трое решили неправильно, то с них суммарно снимут $1\cdot 3 = 3$ балла.

Изначально у них было суммарно 0 баллов. После решения каждой задачи сумма баллов либо не изменялась, либо изменялась на число, делящееся на 3. Поэтому, если бы все ученики писали ответы ко всем задачам, то в конце общая сумма баллов у них делилась бы на 3. Но 100 на 3 не делится. Поэтому кто-то из учеников при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.

6.5. В комнате лежал небольшой мешок с яблоками. Среди 10 человек часть — рыцари (они всегда говорят правду), а остальные — лжецы (они всегда лгут). Первый из этих 10 человек зашёл в комнату, заглянул в мешок и сказал: «В мешке больше 1 ябло-

ресечения. Пусть K и T — соответственно точки касания сторон AD и AB с окружностью ω. Тогда $AK = AT$, поэтому $r = AD - AB = DK - BT$. Из подобия прямоугольных треугольников DKO и DPM следует, что $DK : DP = KO : MP$, откуда $DK = r\cdot\frac{DP}{MP}$. Далее, из подобия прямоугольных треугольников OTB и NPB следует, что $BT : BP = OT : PN$, откуда $BT = r\cdot\frac{BP}{PN}$. Но $PN = PM$ из симметрии; поэтому $DK - BT = r\cdot\frac{DP-BP}{MP} = r\cdot\frac{DB}{MP}$. Левая часть этого равенства равна r, поэтому $DB = MP$. Значит, искомое отношение равно $DB : (2MP) = 1:2$.

10.5. Имеется таблица 11×11. Двое играют в следующую игру. Они по очереди ставят в пустые клетки этой таблицы крестики и нолики: первый за ход ставит один крестик, а второй — один нолик. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. После этого вычисляются два числа: A — количество строк, в которых больше крестиков, чем ноликов, и B — количество столбцов, в которых больше ноликов, чем крестиков. Первый выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Выигрывает первый.

Решение. Заметим сначала, что в каждой строке и каждом столбце по 11 клеток; поскольку число 11 нечётно, в каждом из этих рядов крестиков и ноликов не может быть поровну.

Приведем выигрышную стратегию для первого игрока. Сначала ему нужно поставить крестик в центральную клетку таблицы. Каждым следующим ходом ему следует ставить крестик в клетку, симметричную относительно центра таблицы клетке, в которую только что поставил нолик второй игрок (понятно, что он всегда сможет так сделать). Покажем, что при такой стратегии количество строк, в которых больше крестиков, будет больше количества столбцов, в которых больше ноликов.

Заметим, что все клетки таблицы (кроме центральной) разобьются на пары симметричных относительно центра, причём в каждой такой паре клеток будут стоять ровно один нолик и один крестик. Рассмотрим сначала среднюю строку таблицы. В цен-

Тогда числа $a+b+c$ и $a+b+d$ будут рациональными. Значит, и их разность, равная $(b+c+d)-(a+b+c)=d-a$ также будет рациональным числом. Аналогично можно показать, что $b-a$ и $c-a$ будут рациональными. Таким образом, $b=a+r_1$, $c=a+r_2$, $d=a+r_3$, где r_1, r_2, r_3 — рациональные числа. Но, поскольку число $a+b+c=3a+r_1+r_2$ рационально, число a также рационально. Значит, и число $a+b=2a+r_1$ рационально, что противоречит условию. Итак, на доске не более трёх чисел.

Осталось заметить, что на доске могли быть написаны три числа, удовлетворяющие условию, например, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$.

Комментарий. Только доказательство того, что чисел не больше трёх — 4 балла.

Только пример трёх чисел, удовлетворяющих условию — 2 балла.

10.4. В четырёхугольнике $ABCD$, в котором $BA=BC$ и $DA=DC$, продолжения сторон BA и CD пересекаются в точке N, а продолжения сторон BC и AD — в точке M. Известно, что разность длин двух сторон четырёхугольника $ABCD$ равна радиусу вписанной в этот четырёхугольник окружности. Найдите отношение длин отрезков BD и MN.

Ответ. $BD:MN=1:2$.

Решение. Пусть O — центр окружности ω, вписанной в четырёхугольник $ABCD$, а r — ее радиус (см. рис. 5). Можно считать, что $AD-AB=r$.

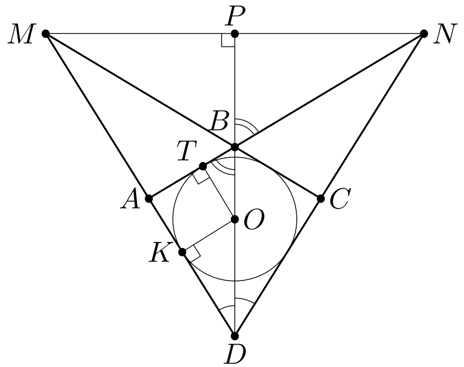


Рис. 5

Продолжим DB до пересечения с MN, пусть P — точка пе-

ка»; после этого он взял одно яблоко из мешка и вышел из комнаты. Потом зашел второй, и, заглянув в мешок, сказал, что в нём больше двух яблок. Затем он взял яблоко из мешка и вышел. Так же и остальные по очереди заходили, говорили, что в мешке осталось больше 3, 4, ..., 10 яблок, брали по яблоку и выходили из комнаты. Какое наибольшее число лжецов может быть среди этих 10 человек?

Ответ. 5.

Решение. Так как 10 человек взяли по яблоку из мешка, то в мешке изначально было не меньше 10 яблок. После того, как первые 4 человека взяли по яблоку из мешка, в мешке осталось не менее 6 яблок. Значит, пятый вошедший (сказавший, что в мешке больше 5 яблок) сказал правду. Аналогично, сказали правду первые четверо. Это означает, что рыцарей не меньше 5, а лжецов не больше $10-5=5$.

С другой стороны, 5 лжецов среди этих 10 человек быть могло, если, например, в мешке изначально лежало 10 (или 11) яблок. Тогда первые пять человек скажут правду, а все, начиная с шестого (перед его приходом в мешке будет только 5 или 6 яблок), солгут.

Комментарий. Доказано, что лжецов не больше пяти — 4 балла.

Приведён только пример, когда лжецов ровно пятеро — 3 балла.

7 класс

7.1. На двух карточках написано одно и то же семизначное число N, оканчивающееся на 9876. Одну карточку разрезали на две, проведя разрез между третьей и четвёртой цифрами, а другую — проведя разрез между четвёртой и пятой цифрами. Приведите пример какого-нибудь числа N такого, чтобы сумма чисел на половинках первой карточки была равна сумме чисел на половинках второй карточки.

Ответ. Единственный вариант — это число 9999876.

Замечание. Ответом является решение ребуса $АБВ + 9876 = АБВ9 + 876$ (разным буквам могут соответствовать одинаковые цифры). Вычитая из обеих частей по 876, получаем $АБВ + 9000 = АБВ0 + 9$. Отсюда $9 \cdot АБВ = 9000 - 9$, то есть $АБВ = 1000 - 1 = 999$. В этом случае получаем $9999 + 876 = 999 + 9876 = 10875$.

Комментарий. Приведён верный пример — 7 баллов.

Обоснование единственности примера не требуется.

7.2. Маша каждый день берёт в школу и съедает на переменах либо 6 слив, либо 2 яблока и банан. В пятницу, когда она съела на перемене часть принесённых фруктов (но не все), оказалось, что с начала недели она уже съела на переменах 21 фрукт. Сколько и каких фруктов осталось у неё в портфеле? Объясните свой ответ.

Ответ. Три сливы.

Решение. Общее количество фруктов, съедаемых Машей на переменах за один день, делится на 3. Поскольку она съела 21 фрукт — число, делящееся на 3, то либо у нее не осталось в портфеле фруктов (что противоречит условию), либо осталось три фрукта. Ими могли быть только сливы, так как в противном случае в портфеле оставались бы 2 яблока и банан, то есть в этот день она бы ещё не ела фруктов.

Комментарий. Только ответ и пример без обоснования — 2 балла.

Только ответ — 0 баллов.

7.3. В зале 2013 человек; каждый из них — либо рыцарь (который

10 класс

10.1. Вася, Петя и Миша стартовали одновременно в забеге на 1 км. Когда Вася финишировал, Петя отставал от него на 100 м, а Миша отставал от Пети на 90 м. Петя закончил бег на 18 секунд позже Васи. На сколько секунд позже Пети прибежал Миша? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

Ответ. На 20 секунд.

Решение. Когда Вася финишировал, Петя пробежал 900 м, а Миша 810 м, то есть скорость Пети в $\frac{10}{9}$ раз больше скорости Миши. Это означает, что когда Петя закончит бег (то есть пробежит 1000 м), Миша пробежит 900 м. То есть за 18 секунд Миша пробежит $900 - 810 = 90$ м. Значит, его скорость равна 5 м/с, и оставшиеся 100 м он пробежит за 20 секунд.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Без обоснования верно указаны значения всех скоростей, и на основании этого получен верный ответ — 2 балла.

10.2. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента a один из этих корней, а коэффициент b удвоить, то полученное уравнение также будет иметь корень.

Решение. Согласно теореме Виета, если t_1 и t_2 — корни данного уравнения, то $a = -t_1 - t_2$, $b = t_1 t_2$. Поэтому новое уравнение имеет вид $x^2 - (2t_1 + t_2)x + 2t_1 t_2 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $D = 4t_1^2 - 4t_1 t_2 + t_2^2 = (2t_1 - t_2)^2 \geqslant 0$. Значит, у этого уравнения есть корень.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что полученное уравнение имеет корень t_2 (или $2t_1$).

10.3. На доске написаны несколько различных чисел. Известно, что сумма любых трёх написанных чисел рациональна, а сумма любых двух написанных чисел — иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске?

Ответ. Три.

Решение. Предположим, что на доске написано не меньше четырёх чисел. Обозначим любые четыре из них через a, b, c, d.

столбцом из 10 клеток.) Первый выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Выигрывает второй.

Решение. Заметим сначала, что в каждой строке и каждом столбце, кроме средних, по 11 клеток; поскольку число 11 нечётно, в каждом из этих рядов крестиков и ноликов не может быть поровну.

Приведем выигрышную стратегию для второго игрока. Каждым своим ходом ему следует ставить нолик в клетку, симметричную клетке, в которую только что поставил крестик первый игрок, относительно центра доски (понятно, что он всегда сможет так сделать). Покажем, что при такой стратегии количество строк, в которых больше крестиков, будет равно количеству столбцов, в которых больше ноликов.

Заметим, что все клетки таблицы (кроме центральной) разобьются на пары симметричных относительно центра, причём в каждой такой паре клеток будут стоять ровно один нолик и один крестик. Рассмотрим сначала среднюю строку таблицы. Центральная клетка (центр таблицы) вырезана. Остальные 10 клеток разбиваются на 5 пар симметричных. Это означает, что в них стоят 5 крестиков и 5 ноликов. Эта строка не даёт преимущества первому игроку. Аналогично, средний столбец не даёт преимущества второму игроку.

Рассмотрим теперь первую и последнюю строки таблицы. Их клетки образуют 11 пар симметричных клеток. Это означает, что в них суммарно стоит 11 крестиков и 11 ноликов. Значит, если в одной из этих строк больше крестиков, то в другой больше ноликов. Аналогичное утверждение можно доказать про остальные пары симметричных строк таблицы, а также про все пары симметричных столбцов. Итак, количество строк, в которых больше крестиков, будет равно 5, и количество столбцов, в которых больше ноликов, будет также равно 5. Поэтому $A = B = 5$, и второй выиграет.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Верно описана симметричная стратегия, но не доказано, что она приводит к победе — 2 балла.

всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). Каждого из них спросили: «Кого в зале больше: лжецов или рыцарей?». Каких ответов — «Лжецов» или «Рыцарей» — было больше и почему?

Ответ. «Рыцарей».

Решение. Общее количество человек в зале нечётно, поэтому либо рыцарей, либо лжецов в зале большинство.

Пусть в зале больше рыцарей. Тогда каждый из них дал ответ «Рыцарей», и с учётом того, что их больше, получается, что больше будет ответов «Рыцарей». Если же в зале больше лжецов, то теперь уже они будут говорить, что рыцарей больше, и, значит, вновь будет больше ответов «Рыцарей».

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Верно разобран только один случай (больше лжецов или больше рыцарей) — 2 балла.

7.4. На клетчатую доску 7×7 положили 16 трёхклеточных уголков так, что ровно одна клетка оказалась непокрытой. Верно ли, что всегда можно убрать один уголок так, что на освободившееся место можно положить трёхклеточный прямоугольник?

Ответ. Неверно.

Решение. На рис. 2 приведены три возможных способа укладки уголков, при которых после убирания любого из уголков положить прямоугольник из трёх клеток не получится.

Замечание. Существуют и другие способы.

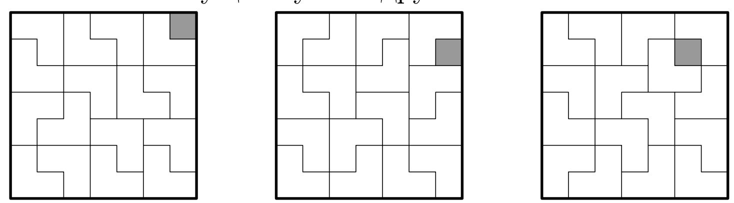


Рис. 2

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Любой верный пример — 7 баллов.

7.5. Загаданы четыре различных натуральных числа. Математик знает про это. Вначале ему назвали сумму двух самых маленьких чисел, и он не смог угадать эти два числа. Но, когда ему сказали, что сумма всех четырёх чисел равна 15, он сумел назвать все четыре числа. Чему равны эти числа? Объясните, как рассуждал математик.

Ответ. 2, 3, 4, 6.

Решение. Вначале математику не могли назвать сумму, меньшую, чем 5, так как при названных суммах 3 или 4 он бы сразу сказал, что это суммы $1 + 2$ или $1 + 3$. Третье из загаданных чисел по крайней мере на 2 больше, чем первое (между ними ещё есть второе число). Аналогично, четвёртое по крайней мере на 2 больше второго. Значит, если бы вначале математику назвали сумму, не меньшую 6, то сумма третьего и четвёртого чисел была бы не меньше, чем $6 + 2 + 2 = 10$, а сумма всех чисел — не меньше, чем $6 + 10 = 16$, что не так.

Итак, сумма первых двух чисел равна 5, а сумма третьего и четвёртого равна $15 - 5 = 10$. Эта сумма не могла быть набрана как $1 + 9$ или $2 + 8$ (так как третье число не меньше 3). Также эта сумма не могла быть набрана как $3 + 7$, так как если бы третье число было равно 3, то сумма первых двух равнялась бы $1+2 = 3$. Значит, третье и четвёртое числа — это 4 и 6. Тогда для первого и второго остаётся единственный вариант с суммой 5, а именно 2 и 3.

Комментарий. Только ответ без обоснования — 1 балл.

следует, что $b + c + d < a$. Но $a \leqslant b$, значит, $b + c + d < a \leqslant b$, откуда следует, что $c + d \leqslant 0$. Значит, по крайней мере одно из двух самых больших чисел, написанных на доске, отрицательно. Следовательно, отрицательных чисел не меньше трёх.

Пример чисел $-5, -4, -3, 1$ показывает, что одно из чисел может быть положительным.

Комментарий. Доказано, что отрицательных чисел не меньше трёх — 4 балла.

Только пример — 3 балла.

9.4. На основании AD равнобокой трапеции $ABCD$ выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают вторично окружность, описанную около трапеции $ABCD$, в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника KMN, касается прямой AD.

Решение. Утверждение задачи равносильно тому, что угол между лучом KA и хордой KN измеряется половиной заключенной между ними дуги KN окружности, описанной около треугольника KMN, то есть равняется вписанному углу KMN (см. рис. 4). Но этот угол есть угол BMN, равный углу BCN, поскольку они вписаны в окружность, описанную около трапеции, и опираются на одну её дугу BN. Наконец, равенство $\angle AKN = \angle BCN$ сразу следует из параллельности сторон трапеции.

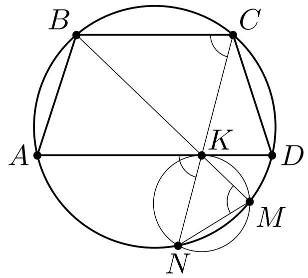


Рис. 4

9.5. Имеется таблица 11×11, из которой вырезана центральная клетка. Двое играют в следующую игру. Они по очереди ставят в пустые клетки этой таблицы крестики и нолики: первый игрок за ход ставит один крестик, а второй — один нолик. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. После этого вычисляются два числа: A — количество строк, в которых больше крестиков, чем ноликов, и B — количество столбцов, в которых больше ноликов, чем крестиков. (При этом средняя строка считается одной строкой из 10 клеток, а средний столбец — одним

9 класс

9.1. Числа от 1 до 20 разбили на пары, и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из этих 10 сумм может делиться на 11?

Ответ. 9.

Решение. Если бы все 10 пар чисел давали суммы, делящиеся на 11, то и сумма всех этих сумм, то есть сумма всех 20 чисел, делилась бы на 11. Однако число $1+2+3+\ldots+20 = 210$ не делится на 11. Значит, таких пар не больше 9.

С другой стороны, пример $2+20 = 3+19 = 4+18 = \ldots = 10+ + 12 = 22$ показывает, как получить 9 искомых пар (последняя сумма $1 + 11$ равна 12 — числу, не делящемуся на 11).

Замечание. Существуют и другие разбиения, в которых суммы в девяти парах делятся на 11.

Комментарий. Показано, что больше 9 пар получить нельзя — 4 балла.

Только пример — 3 балла.

9.2. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x) = x^2+ax+b$ имеет два корня. Докажите, что если прибавить к коэффициенту a один из этих корней, а из коэффициента b вычесть квадрат этого же корня, то полученное уравнение также будет иметь корень.

Решение. Согласно теореме Виета, если t_1 и t_2 — корни данного уравнения, то $a = -t_1 - t_2$, $b = t_1t_2$. Пусть t_1 — указанный в условии корень. Тогда новое уравнение имеет вид $x^2 - t_2x + (t_1t_2 - t_1^2) = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $D = t_2^2 - 4t_1t_2 + 4t_1^2 = (2t_1 - t_2)^2 \geqslant 0$. Значит, уравнение имеет корень.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что корнем полученного уравнения является число t_1 (другой его корень — это $t_2 - t_1$).

9.3. На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске?

Ответ. Три.

Решение. Пусть $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ — данные числа. Из условия

8 класс

8.1. За круглым столом сидят несколько человек — каждый из них либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). У каждого из них спросили: «Кто твой сосед справа — рыцарь или лжец?». При этом было получено ровно 20 ответов «Лжец». Докажите, что на вопрос: «Кто твой сосед слева — рыцарь или лжец?» также было бы получено ровно 20 ответов «Лжец».

Решение. Ответ «Лжец» появляется ровно тогда, когда справа от лжеца сидит рыцарь, либо когда справа от рыцаря сидит лжец. То есть таких ответов столько же, сколько пар соседей Рыцарь–Лжец. При изменении вопросов на вопросы о соседях слева ответы «Лжец» будут появляться в этих же парах. Значит, их тоже будет 20.

8.2. Петя и три его одноклассника стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 12 секунд после начала забега никто ещё не финишировал, и все его участники в сумме пробежали 288 метров. А когда Петя закончил бег, остальным трём участникам оставалось пробежать до финиша в сумме 40 метров. Сколько метров пробежал Петя за 12 секунд? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

Ответ. 80 м.

Решение. Когда Петя закончил бег, ребята вместе пробежали $4 \cdot 100 - 40 = 360$ м. А за 12 секунд они вместе пробежали 288 м. То есть за 12 секунд Петя пробежал $\frac{288}{360}$ от 100 метров, то есть $\frac{288}{360} \cdot 100 = 80$ м.

Комментарий. Только ответ и пример с указанием скоростей бегунов, без доказательства того, что другие ответы невозможны — 3 балла.

Только ответ — 1 балл.

8.3. Докажите, что можно выбрать три натуральных числа a, b, c, больших 2013 и таких, что $a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$.

Решение. Рассмотрим сумму $(n-1)^2+(n+1)^2 = 2(n^2+1)$.

При любом натуральном $n > 2014$ она дает искомую тройку $a = n - 1$, $b = n + 1$, $c = n$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Приведен любой верный пример с числами a, b, c, большими 2013 — 7 баллов.

Приведён пример, в котором хотя бы одно из чисел a, b, c меньше 2013 — 0 баллов.

Приведён пример, в котором наименьшее из чисел a, b, c равно 2013 — 4 балла.

8.4. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла BAC пересекает прямую CD в точке E, а биссектриса угла DAC пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что биссектриса угла BAD перпендикулярна прямой EF.

Решение. Из параллельности прямых DE и AB следует, что $\angle AED = \angle EAB$ (см. рис. 3). Но по условию AE — биссектриса угла BAC, значит, $\angle AEC = \angle CAE$. Отсюда следует, что $CE = CA$. Аналогично, $CF = CA$. Но тогда в равнобедренном треугольнике ECF биссектриса угла при вершине C является высотой, то есть биссектриса угла ECF перпендикулярна прямой EF. Осталось заметить, что биссектрисы равных углов ECF и BAD параллельны, так как они образуют равные углы с параллельными сонаправленными лучами CF и AD.

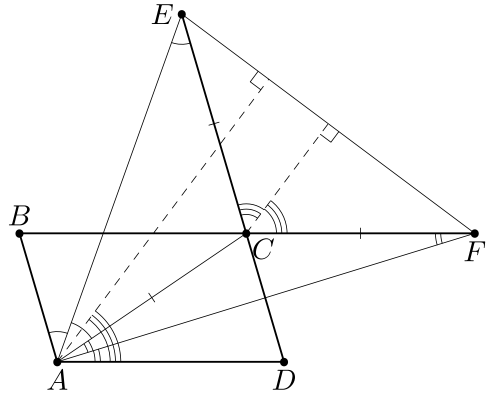


Рис. 3

Замечание. После получения равенства $CE = CF$ решение можно закончить по-другому, выразив все углы на рисунке через $\angle BAC$ и $\angle CAD$.

Комментарий. Доказано, что треугольник ECF равнобедренный — 4 балла.

8.5. Каких семизначных чисел без нулей в записи больше: тех, у которых сумма цифр равна 15, или тех, у которых она равна 48?

Ответ. Чисел с суммой цифр 48 больше.

Решение. Обозначим первую группу чисел (с суммой цифр, равной 15), через M, а вторую группу (с суммой цифр, равной 48) — через N. Заметим, что $15 + 48 = 63 = 9 \cdot 7$. Последнее равенство означает, что каждому числу A из M, не имеющему в записи цифр 0 и 9, соответствует число B из N, полученное заменой в A каждой цифры a на цифру $9 - a$. При этом разным числам из M соответствуют разные числа из N, и полученные числа B также не имеют в записи цифр 0 и 9. Итак, оба множества содержат одинаковое количество чисел без нулей и девяток.

Осталось сравнить количества чисел в данных множествах, содержащих в своих десятичных записях цифру 9. Число с суммой цифр 15 может содержать только одну девятку, а остальные цифры должны быть равны 1, так как $9 + 1 \cdot 6 = 15$. Количество таких чисел равно 7 — по количеству позиций, на которой стоит девятка. В то же время количество чисел в N, содержащих в своей записи хотя бы одну цифру 9, значительно больше. Даже у чисел с одной девяткой в записи сумма остальных шести цифр равна 39 и может быть набрана тремя шестёрками и тремя семёрками более, чем семью способами.

Комментарий. Показано, что числа без цифр 0 и 9 разбиваются на пары — 3 балла.

Только ответ — 0 баллов.

Верно вычислено количество чисел в группе M — 1 балл.

Верно вычислено количество чисел в группе N — 4 балла.