**Всероссийская олимпиада школьников**

**по МАТЕМАТИКЕ**

**2013-2014 уч.год.**

**Школьный этап.**

**10 класс**

1. При каком целом *k* неравенство $x^{2}+2\left(4k-1\right)x+15k^{2}-2k-7>0$ верно при любом действительном *x*?
2. Цифры трехзначного числа образуют арифметическую прогрессию. Если к нему прибавить 990, получится число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Найдите это трехзначное число.
3. В равнобокой трапеции ABCD известно, что АВ=CD; AD=28 см, высота 24 см. Окружность радиуса 3 см с центром в точке пересечения диагоналей трапеции касается меньшего основания BC и боковых сторон. Найдите площадь трапеции.
4. Решите систему уравнений: $\left\{\begin{array}{c}(x+y)\left(x+y+z\right)=72\\(y+z)\left(x+y+z\right)=120\\(x+z)\left(x+y+z\right)=96\end{array}\right.$.
5. Произведение последовательных чисел 1∙2∙3∙4∙5∙…n обозначают n! (n-факториал). Можно ли вычеркнуть из произведения 1!∙2!∙3!∙4!∙5!∙…99! ∙100! один из ста факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа?

**Ответы.**

1. Неравенство будет верно, если D$<$0. Найдя дискриминант и учитывая, что он должен быть отрицателен, получим неравенство $k^{2}-6k+8<0$, которое будет иметь решения при $2<k<4$, т.е. при *k* =3.

**Ответ**: при *k* =3.

1. Сумма данного числа с числом 990 есть число четырехзначное. Цифра тысяч 1, поэтому четырехзначное число 1111 или 1248. Вычитание из этих чисел числа 990 показывает, что условию задания удовлетворяет только число 1248. Значит, 1248 – 990 = 258.

**Ответ**: число 258.

 Пусть ВК = x, тогда SBOC = 3х; SAOD = 14∙ 21= 294.

 К

 В С Треугольники BOC и AOD подобны с

*r* О

1. коэффициентом k = 28:2x =14 : x.

 SAOD : SBOC = 294:3x = (14 :x)2. Получаем

 x=2.

 Следовательно, BC = 4.

 А N D Применив формулу площади трапеции,

 получим SABCD = 384 см2.

 **Ответ**: SABCD = 384 см2

1. Сложив все три уравнения системы, получим уравнение $\left(x+y+z\right)\left(2x+2y+2z\right)=288$; $\left(x+y+z\right)=12 или \left(x+y+z\right)=-12 .$ Подставляя вместо $\left(x+y+z\right)$ числа 12 и -12, получим в первом случае (2;4;6), во втором случае (-2;-4;-6). **Ответ**: (2;4;6) или (-2;-4;-6).
2. Заменив в произведении N = 1!∙2!∙3!∙4!∙5!∙…99! ∙100! факториалы их определениями, т.е. записав 1∙(1∙2) ∙ ( 1∙2∙3)∙ ( 1∙2∙3∙4)∙ ( 1∙2∙3∙4∙5)… (1∙2∙… 100) видим, что множитель «1» появляется 100 раз, множитель «2» - 99 раз, «3» - 98 раз и т.д. вплоть до единственного множителя «100».

 Значит, N = 299∙398∙497∙…992∙100, так что N можно представить в

 виде: N = *a*2 ∙ 2 ∙ 4 ∙ 6∙…98 ∙ 100. Вынося из четных чисел по двойке,

 получим: N = *a*2∙ 250∙ 1∙2∙3∙4∙…49∙50.

 Выходит, достаточно зачеркнуть 50!, и произведение факториалов станет точным квадратом.