Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1

а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x}{2\cos x+1}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Левая часть уравнения определена при $\cos x\neq-\frac{1}{2}$, то есть при $x\neq\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Числитель дроби должен быть равен 0:

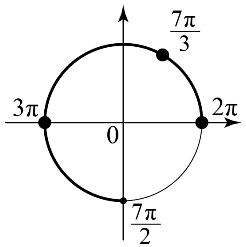
$$2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x=0;\ \sin x\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0;$$

$$\sin x=0 \quad \text{или} \quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x=\pi n, n\in\mathbb{Z} \text{ или } x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Серию $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ нужно отбросить. Получаем ответ: πn; $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, лежащие на отрезке $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$: $x=2\pi$; $x=\frac{7\pi}{3}$; $x=3\pi$.



Ответ: а) πn; $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{7\pi}{3}$; 3π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

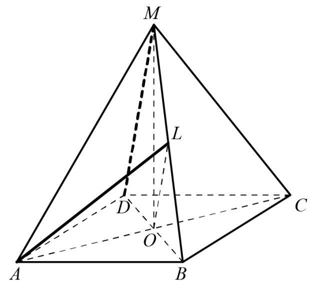
С2

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L – середина ребра MB. Найдите высоту данной пирамиды.

Решение.

Обозначим угол между DM и AL буквой α. Пусть MO – высота пирамиды $MABCD$. Тогда OL – средняя линия треугольника BDM, следовательно, $OL\parallel MD$. Поэтому $\angle ALO=\alpha$. По условию $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}$.

Основание $ABCD$ – квадрат со стороной, равной $5\sqrt{2}$. Следовательно, $OA\perp OB$, $OL\perp OA$, $OA=5$. Далее, из прямоугольного треугольника AOL находим $OL=\frac{OA}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{5}{\sqrt{2}}$. Боковое ребро $MD=2OL=5\sqrt{2}$, поскольку OL – средняя линия треугольника BDM.



Из прямоугольного треугольника MOD находим искомую высоту MO пирамиды $MABCD$: $MO=\sqrt{MD^2-OD^2}=\sqrt{50-25}=5$.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+2} - 257 \cdot 2^x + 16 \le 0, \\ 2\log_2 \dfrac{x+2}{x-3,7} + \log_2 (x-3,7)^2 \ge 2. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $y = 2^x$:

$$16y^2 - 257y + 16 \le 0;\ \ (y-16)(16y-1) \le 0;\ \ \frac{1}{16} \le y \le 16.$$

Отсюда получаем решение первого неравенства: $-4 \le x \le 4$.

Решим второе неравенство. Первое слагаемое определено при $\dfrac{x+2}{x-3,7} > 0$, то есть при $x < -2$ или $x > 3,7$. Запомнив это, преобразуем неравенство:

$$\log_2 \frac{(x+2)^2}{(x-3,7)^2} + \log_2 (x-3,7)^2 \ge 2;$$

$$\log_2 (x+2)^2 \ge 2;\ \ (x+2)^2 \ge 4;\ \ x(x+4) \ge 0;$$

$$x \le -4 \text{ или } x \ge 0.$$

Получаем решение второго неравенства: $x \le -4$ или $x > 3,7$.

Решением системы является общая часть решений обоих неравенств: $x = -4$ или $3,7 < x \le 4$.

Ответ: $-4;\ (3,7;4]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую – в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP:PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

Решение.

а) Обозначим $\angle BAD = \angle PAB = \alpha$. Поскольку $ABQP$ и $CDPQ$ – вписанные четырёхугольники,

$$\angle BQP = 180^\circ - \alpha,$$

$$\angle CQP = 180^\circ - \angle BQP = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha,$$

$$\angle ADC = \angle PDC = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \alpha.$$

Значит, $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$, и поэтому $AB \parallel CD$. Противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ попарно параллельны, следовательно, это параллелограмм.

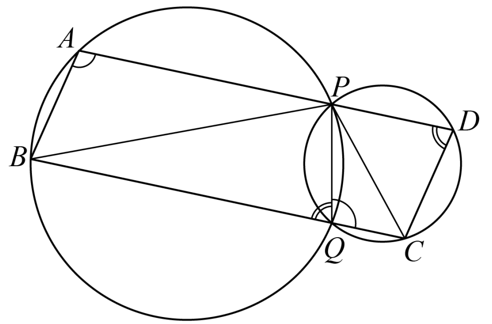
б) Пусть R – радиус второй (меньшей) окружности. Тогда радиус большей окружности равен $2R$. По теореме синусов

$$BP = 2 \cdot 2R \sin \angle BQP = 4R \sin(180^\circ - \alpha) = 4R \sin \alpha,$$

$$PC = 2R \sin \angle CQP = 2R \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{4R \sin \alpha}{2R \sin \alpha} = 2.$$



Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1

а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Левая часть уравнения определена при $\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть при $x \neq \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Числитель дроби должен быть равен 0:

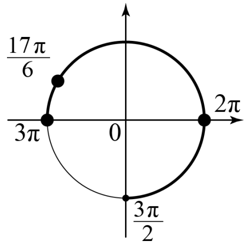
$$2\sin^2 x - \sin x = 0; \quad \sin x(2\sin x - 1) = 0;$$

$$\sin x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Серию $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ нужно отбросить. Получаем ответ: πn; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, лежащие на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$: $x = 2\pi$; $x = \frac{17\pi}{6}$; $x = 3\pi$.



Ответ: а) πn; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{17\pi}{6}$; 3π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

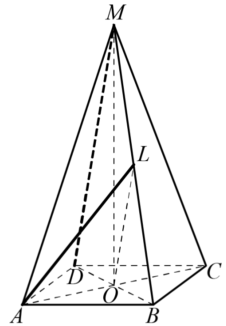
С2

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны 5. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\frac{2}{3}$, L – середина ребра MB. Найдите высоту данной пирамиды.

Решение.

Пусть MO – высота пирамиды $MABCD$. Тогда OL – средняя линия треугольника BDM, следовательно, $OL \parallel MD$. Поэтому $\angle ALO = \alpha$. По условию $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

Основание $ABCD$ – квадрат со стороной, равной 5. Следовательно, $OA \perp OB$, $OL \perp OA$, $OA = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Далее, из прямоугольного треугольника AOL находим $OL = \frac{OA}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{15\sqrt{2}}{4}$. Боковое ребро $MD = 2OL = \frac{15}{\sqrt{2}}$, поскольку OL – средняя линия треугольника BDM.



Из прямоугольного треугольника MOD находим искомую высоту MO пирамиды $MABCD$: $MO = \sqrt{MD^2 - OD^2} = 10$.

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 33\cdot 2^x + 8 \le 0, \\ 2\log_2 \dfrac{x-1}{x+1{,}3} + \log_2 (x+1{,}3)^2 \ge 2. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $y = 2^x$:

$$4y^2 - 33y + 8 \le 0; \quad (y-8)(4y-1) \le 0; \ \frac{1}{4} \le y \le 8.$$

Отсюда получаем решение первого неравенства: $-2 \le x \le 3$.

Решим второе неравенство. Первое слагаемое определено при $\dfrac{x-1}{x+1{,}3} > 0$, то есть при $x < -1{,}3$ или $x > 1$. Запомнив это, преобразуем неравенство:

$$\log_2 \frac{(x-1)^2}{(x+1{,}3)^2} + \log_2 (x+1{,}3)^2 \ge 2;$$

$$\log_2 (x-1)^2 \ge 2; \quad (x-1)^2 \ge 4;$$

$$x^2 - 2x - 3 \ge 0;$$

$$x \le -1 \ \text{ или } \ x \ge 3.$$

Получаем решение второго неравенства: $x < -1{,}3$ или $x \ge 3$.

Решением системы является общая часть решений обоих неравенств: $-2 \le x < -1{,}3$ или $x = 3$.

Ответ: $[-2; -1{,}3)$; 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

С4 Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую – в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.

б) Найдите отношение $CP : PB$, если радиус первой окружности втрое больше радиуса второй.

Решение.

а) Обозначим $\angle BAD = \angle PAB = \alpha$. Поскольку $ABQP$ и $CDPQ$ – вписанные четырёхугольники,

$$\angle BQP = 180^\circ - \alpha, \ \angle CQP = 180^\circ - \angle BQP = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha,$$

$$\angle ADC = \angle PDC = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \alpha.$$

Значит, $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$, и поэтому $AB \parallel CD$. Противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ попарно параллельны, следовательно, это параллелограмм.

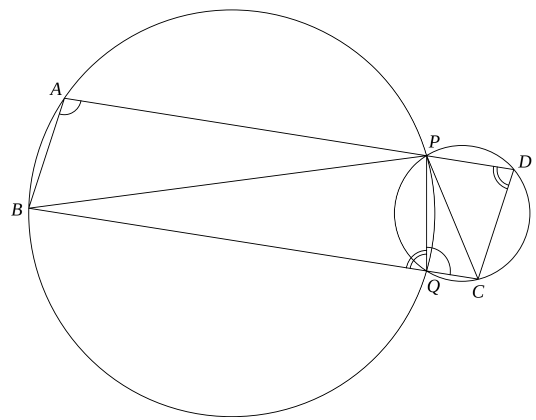
б) Пусть R – радиус второй (меньшей) окружности. Тогда радиус большей окружности равен $3R$. По теореме синусов

$$BP = 2\cdot 3R\sin\angle BQP = 6R\sin(180^\circ - \alpha) = 6R\sin\alpha,$$

$$PC = 2R\sin\angle CQP = 2R\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{CP}{PB} = \frac{2R\sin\alpha}{6R\sin\alpha} = \frac{1}{3}.$$



Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Вариант МА10403

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
B1	11
B2	24
B3	5
B4	25920
B5	10
B6	0,25
B7	-6
B8	55

№ задания	Ответ
B9	1
B10	24
B11	-22
B12	0,75
B13	6
B14	9,6
B15	7

Вариант МА10404

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
B1	4
B2	649
B3	2
B4	23610
B5	19
B6	0,26
B7	-13
B8	155

№ задания	Ответ
B9	3
B10	28
B11	34
B12	8
B13	16
B14	15
B15	-5